

# Flächentragwerke Formelsammlung

Jan Höffgen

18. Februar 2014

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Scheiben</b>	<b>2</b>
1.1 Rotationssymmetrische Scheiben . . . . .	2
<b>2 Platten</b>	<b>3</b>
2.1 Platten-DGL . . . . .	3
2.2 Belastungsumordnungsverfahren . . . . .	5
2.3 Verfahren nach Pieper/Martens . . . . .	5
<b>3 Schalen</b>	<b>6</b>

# 1 Scheiben

- Scheiben-DGL:  $2 \cdot (1 + \nu) \cdot n_{xy,xy} = n_{x,yy} - \nu \cdot n_{y,yy} + n_{y,xx} - \nu \cdot n_{x,xx}$
- Airy'sche Spannungsfunktion  $F$  mit  $\Delta\Delta F = F_{,xxxx} + 2 \cdot F_{,xxyy} + F_{,yyyy} = 0$ 
  - $n_x =: F_{,yy} \rightarrow \sigma_x = \frac{n_x}{d}$
  - $n_y =: F_{,xx} \rightarrow \sigma_y = \frac{n_y}{d}$
  - $n_{xy} =: -F_{,xy} - yf_x - xf_y \rightarrow \tau_{xy} = \frac{n_{xy}}{d}$
- Verschiebungen
  - $Ed \cdot u_x = \int_{(x)} F_{,yy} dx - \nu F_{,x} + f(y)$
  - $Ed \cdot u_y = \int_{(y)} F_{,xx} dy - \nu F_{,y} + f(x)$
- Dehnungen
  - $\varepsilon_x = u_{x,x} = \frac{1}{Ed} \cdot (F_{,yy} - \nu F_{,xx}) = \frac{1}{Ed} \cdot (n_x - \nu n_y)$
  - $\varepsilon_y = u_{y,y} = \frac{1}{Ed} \cdot (F_{,xx} - \nu F_{,yy}) = \frac{1}{Ed} \cdot (n_y - \nu n_x)$
  - $\gamma_{xy} = u_{x,y} + u_{y,x}$
- Transformation der Kräfte
  - $n_\xi = \frac{1}{2}(n_x + n_y) + \frac{1}{2}(n_x - n_y) \cos(2\alpha) + n_{xy} \sin(2\alpha)$
  - $n_\eta = \frac{1}{2}(n_x + n_y) - \frac{1}{2}(n_x - n_y) \cos(2\alpha) - n_{xy} \sin(2\alpha)$
  - $n_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(n_x - n_y) \sin(2\alpha) + I_{yz} \cos(2\alpha)$
  - Hauptnormalkräfte: Drehung um  $\tilde{\alpha} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2 \cdot n_{xy}}{n_x - n_y}\right)$
- Randbedingungen
  - freier Rand:  $n_x(a) = n_y(a) = 0$
  - gelagerter Rand:  $u_x(a) = u_y(a) = 0$  mit  $f(y) = f(x) = 0$
- Scheiben-DGL in PK mit  $F \neq f(\varphi)$ :  $\Delta\Delta F = F_{,rrrr} + \frac{2}{r} F_{,rrr} - \frac{1}{r^2} F_{,rr} + \frac{1}{r^3} F_{,r} = 0$
- Allg. Lösung:  $F = c_0 + c_1 \cdot \ln r + c_2 \cdot r^2 + c_3 \cdot r^2 \cdot \ln r$ 
  - $n_r = \frac{1}{r^2} F_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{r} F_{,r}$
  - $n_\varphi = F_{,rr}$
  - $n_{r\varphi} = -\left(\frac{1}{r} \cdot F_{,\varphi}\right)_{,r}$

## 1.1 Rotationssymmetrische Scheiben

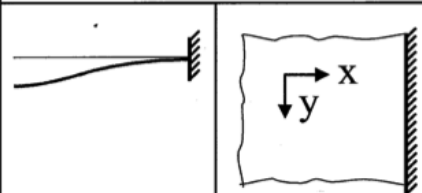
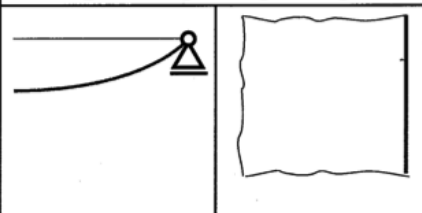
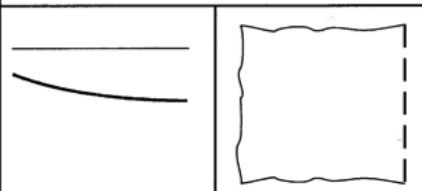
- Scheiben-DGL in PK:  $\Delta\Delta F = F_{,rrrr} + \frac{2}{r} F_{,rrr} - \frac{1}{r^2} F_{,rr} + \frac{1}{r^3} F_{,r} = 0$
- Allg. Lösung:  $F = c_0 + c_1 \cdot \ln r + c_2 \cdot r^2$ 
  - $n_r = \frac{1}{r} F_{,r} = c_1 \cdot \frac{1}{r^2} + 2c_2$
  - $n_\varphi = F_{,rr} = -c_1 \frac{1}{r^2} + 2c_2$
  - Bei Vollscheiben  $c_1 = 0$ , damit  $n_r(0)$  und  $n_\varphi(0) \neq \infty$
- Werkstoffgesetz
  - $\varepsilon_r = \frac{1}{Ed}(n_r - \nu n_\varphi) + \alpha_T \Delta T$
  - $\varepsilon_\varphi = \frac{1}{Ed}(n_\varphi - \nu n_r) + \alpha_T \Delta T$
- Verschiebungen
  - $u_r = \int \varepsilon_r dr = \frac{1}{Ed} \int (n_r - \nu n_\varphi) dr = r \varepsilon_\varphi$
  - $u_\varphi = 0$

## 2 Platten

### 2.1 Platten-DGL

- Plattentheorien
  - Reissner–Mindlin für  $\frac{1}{5} \geq \frac{d}{l_x} \geq \frac{1}{10}$ 
    - \* Schubsteif (Schubverzerrung,  $\gamma_{xz}, \gamma_{yz} \neq 0$ )
  - Kirchhoff für  $\frac{1}{10} \geq \frac{d}{l_x} \geq \frac{1}{50}$ 
    - \* Schubstarr (ohne Schubverzerrungen,  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ )
- Plattensteifigkeit  $B = \frac{E \cdot d^3}{12(1-\nu^2)}$
- Allg. Platten DGL nach Kirchhoff:  $w_{,xxxx} + 2 \cdot w_{,xxyy} + w_{,yyyy} = \frac{p}{B}$ 
  - Schnittgrößen (Bild S. 3.14)
    - \*  $m_x = -B(w_{,xx} + \nu w_{,yy})$  (Moment um  $y$ , bewirkt Spannungen in  $x$ -Richtung)
    - \*  $m_y = -B(w_{,yy} + \nu w_{,xx})$  (Moment um  $x$ , bewirkt Spannungen in  $y$ -Richtung)
    - \*  $m_{xy} = -B \cdot w_{,xy}(1 - \nu)$  ( $= 0$  an Einspannungen,  $< 0$  am freien Rand)
    - \*  $q_x = -B(w_{,xxx} + w_{,xyy})$  (Querkraft in  $z$  am Rand parallel zur  $y$ -Richtung)
    - \*  $q_y = -B(w_{,yyy} + w_{,xxy})$  (Querkraft in  $z$  am Rand parallel zur  $x$ -Richtung)
  - Ersatzquerkräfte
    - \*  $\bar{q}_x = q_x + m_{xy,y} = -B(w_{,xxx} + (2 - \nu) \cdot w_{,xxy})$
    - \*  $\bar{q}_y = q_y + m_{xy,x} = -B(w_{,yyy} + (2 - \nu) \cdot w_{,xxy})$
  - Spannungen
    - \*  $\sigma_x = \pm 6 \frac{m_x}{d^2}$
    - \*  $\sigma_y = \pm 6 \frac{m_y}{d^2}$
    - \*  $\tau_{xy} = \pm 6 \frac{m_{xy}}{d^2}$
    - \*  $\tau_{xz} = 1,5 \frac{q_x}{d}$
    - \*  $\tau_{yz} = 1,5 \frac{q_y}{d}$
  - Eckkräfte durch Drillmoment:  $A = 2 \cdot m_{xy}$
- DGL der drillweichen Platte:  $w_{,xxxx} + w_{,yyyy} = \frac{p}{B}$ 
  - $m_{xy} = 0$
- DGL für rotationssymmetrische Platten:  $r^4 w_{,rrrr} + 2r^3 w_{,rrr} - r^2 w_{,rr} + r w_{,r} = \frac{p}{B} r^4$ 
  - Lösungsansatz:  $w = w_H + w_P = c_0 + c_1 \ln r + c_2 r^2 + c_3 r^2 \ln r + w_P$ 
    - \*  $p = \text{const.} \rightarrow w_P = \frac{p \cdot r^4}{64B}$
    - \* Ableitungen
      - $w_{H,r} = \frac{c_1}{r} + 2c_2 r + c_3(2r \ln r + r)$
      - $w_{H,rr} = -\frac{c_1}{r^2} + 2c_2 + c_3(3 + 2 \ln r)$
      - $w_{H,rrr} = 2\frac{c_1}{r^3} + c_3 \cdot \frac{2}{r}$
    - \* Für rotationssymmetrische Kreisplatten unter Volllast gilt  $c_1 = c_3 = 0$   
 $\Rightarrow w_H(r) = c_0 + c_2 r^2$
    - \* Lösungen für Kreisplatten unter Gleichlast, mittiger Einzellast und konst. Randmomenten im Skript S. 3.28 – 3.32
  - Schnittgrößen
    - \*  $m_r = -B(w_{,rr} + \nu \frac{w_{,r}}{r})$
    - \*  $m_\varphi = -B(\frac{1}{r} w_{,r} + \nu w_{,rr})$
    - \*  $q_r = -B(w_{,rrr} + \frac{1}{r} w_{,rr} - \frac{1}{r^2} w_{,r})$
- DGL für elastische Bettung:  $\Delta \Delta w + \frac{c}{B} w = \frac{p}{B}$
- DGL für Temperaturbelastung:  $\Delta \Delta w + (1 + \nu) \Delta \kappa^t = \frac{p}{B}$

## • Randbedingungen

Art	RB	Folgerungen
<p>Einspannung</p> 	$w = 0$ $w_{,x} = 0$	$w_{,y} = 0$ $w_{,xy} = 0 \rightarrow m_{xy} = 0$ $\rightarrow \bar{q}_x = q_x$
<p>gelenkige Lagerung</p> 	$w = 0$ $m_x = 0$	$w_{,y} = 0 \quad w_{,x}(y) \neq 0$ $\rightarrow w_{,xy} \neq 0$ $\rightarrow m_{xy} \neq 0 \rightarrow \bar{q}_x = \dots$ $w_{,yy} = 0 \rightarrow w_{,xx} = 0$ $(m_x \stackrel{!}{=} 0) \rightarrow \Delta w = 0$
<p>freier Rand</p> 	$\bar{q}_x = 0$ $m_x = 0$	$\bar{q}_x$ $q_x + m_{xy,y} = 0$

– Rotationssymmetrische Platte mit Radius  $a$  unter konstanter Volllast  $p$ :  $q_r(a) = -\frac{p \cdot a}{2}$

– Rotationssymmetrische Platte:  $w(r=0) = \text{„endlich“} \rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} w \neq \infty$

## • Reihenlösungen (S. 3.33 ff)

– Beschreibung der Lastfunktion  $\bar{p}(x)$  als Fourierreihe  $p(x)$

$$* p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\frac{2k\pi}{L}x) + b_k \sin(\frac{2k\pi}{L}x))$$

$$\cdot a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L \bar{p}(x) dx$$

$$\cdot a_k = \frac{2}{L} \int_0^L \bar{p}(x) \cos(\frac{2k\pi}{L}x) dx$$

$$\cdot b_k = \frac{2}{L} \int_0^L \bar{p}(x) \sin(\frac{2k\pi}{L}x) dx$$

\* f ungerade  $\leftrightarrow a_k = 0$  für  $k \geq 0$

\* f gerade  $\leftrightarrow b_k = 0$  für  $k \geq 1$

– Lösungsansatz:  $w = w_p + w_h$

$$* w_p = \sum_k w_n \sin(\frac{2k\pi}{L}x) \quad (w_n \text{ aus S. 3.40})$$

$$* w_h = \sum_k (d_{k1} \cosh(\frac{2k\pi}{L}x) + d_{k2} x \cosh(\frac{2k\pi}{L}x)) + \sum_k (d_{k3} \sinh(\frac{2k\pi}{L}x) + d_{k4} x \sinh(\frac{2k\pi}{L}x))$$

\* Ableiten und in Ansatzfunktion für  $w$  einsetzen

· Partikulärlösung: Koeffizientenvergleich der Partikulärlösung mit Lastfunktion

· Homogene Lösung: Berücksichtigung der Randbedingungen

## 2.2 Belastungsumordnungsverfahren

- Voraussetzungen
  - $\frac{\min l_{x/y}}{\max l_{x/y}} \geq 0,75$
  - Gleichlast
  - Plattendicke konstant
  - $w \approx 0$  an den Rändern, drillsteife Plattenecken, Plattenfelder untereinander biegesteif
- Bestimmung der maximalen Feldmomente
  1. Berechnung der Feldmomente  $m_f^a$  für die realen Lagerungsbedingungen für die Belastung  $p' = g_d + \frac{q_d}{2}$ 
    - (a) Bestimmung der Lagerungsbedingungen und Identifikation des Plattentyps
    - (b) Bestimmung des jeweiligen Stützweitenverhältnisses des Feldes  $\left(\frac{l_y}{l_x} \geq 1\right)$
    - (c)  $m_{f,ix/y} = p' \cdot \frac{l_{x/y}^2}{TW}$
  2. Berechnung der Feldmomente  $m_f^b$  für allseitig gelenkige Lagerung für  $p'' = \pm \frac{q_d}{2}$ 
    - Für maximales Feldmoment Feld mit  $+\frac{q_d}{2}$ , für minimales Feldmoment Feld mit  $-\frac{q_d}{2}$  belasten
  3.  $m_{f,ges} = m_f^a + m_f^b$
- Bestimmung der Stützmomente
  1. Berechnung der Stützmomente  $m_{s,ij}^a$  und  $m_{s,ji}^a$  für die realen Lagerungsbedingungen für die Belastung  $p' = g_d + \frac{q_d}{2}$
  2. Berechnung der Stützmomente  $m_{s,ij}^b$  und  $m_{s,ji}^b$  mit Einspannungsrandbedingung an der untersuchten Stützung für  $p'' = \pm \frac{q_d}{2}$
  3.  $m_{s,ij,ges} = m_{s,ij}^a + m_{s,ij}^b$
  4.  $m_{s,ges} = \frac{1}{2} \cdot (m_{s,ij,ges} + m_{s,ji,ges})$
- Berücksichtigung der Querdehnung:  $m_{f,x}(\nu \neq 0) = m_{f,x}(\nu = 0) + \nu \cdot m_{f,y}(\nu = 0)$

## 2.3 Verfahren nach Pieper/Martens

- Voraussetzungen
  - Verkehrslast  $q_d \leq 2 \cdot g_d$
  - Gleichlast
  - Plattendicke konstant
  - $w \approx 0$  an den Rändern, Plattenfelder untereinander biegesteif
- Bestimmung der Feldmomente
  1. Bestimmung der Lagerungsbedingungen und Identifikation des Plattentyps
  2. Bestimmung des jeweiligen Stützweitenverhältnisses des Feldes  $\left(\frac{l_y}{l_x} \geq 1\right)$
  3. Ablesen der Beiwerte  $f_x$  und  $f_y$  für drillsteife (oder  $f_x^0$  und  $f_y^0$  für drillweiche) Platten aus Tafeln
  4. Berechnung der Feldmomente  $m_{f,ix/y} = p_d \cdot \frac{l_{x/y}^2}{f_{x/y}}$  mit  $p_d = g_d + q_d$
- Bestimmung der Stützmomente
  1. Ablesen der Beiwerte  $s_x$  und  $s_y$  für beide Platten, die am Unterzug gelagert sind
    - Für Stützmoment an der langen Seite ( $m_{y,erm}$ )  $s_x$  ablesen
  2. Berechnung der Stützmomente
 
$$m_{s,ij} = m_{s,ji} = - \begin{cases} \max \left\{ \frac{1}{2} \cdot p_d \cdot l_{x/y} \cdot \left( \frac{1}{s_{x/y,ij}} + \frac{1}{s_{x/y,ji}} \right) \right. & \text{für } \frac{l_{xi}}{l_{xj}} < 5 \\ \left. 0,75 \cdot \max m_{s,ij} \right. & \text{für } \frac{l_{xi}}{l_{xj}} > 5 \\ \max\{m_{si}, m_{sj}\} & \end{cases}$$

### 3 Schalen

- Koordinatenrichtungen
  - $\vartheta$ : Winkel zwischen Schalenoberseite und Schalenunterseite
  - $\varphi$ : Winkel in Umfangsrichtung
- Gleichgewichtsbedingungen (Membrantheorie)
  - $\sum F_{\vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} n_{\vartheta} r \sin \vartheta - n_{\varphi} r \cos \vartheta + p_{\vartheta} r^2 \sin \vartheta = 0$
  - $\sum F_{\varphi} = \frac{\partial n_{\varphi}}{\partial \varphi} r + \frac{\partial}{\partial \vartheta} n_{\vartheta \varphi} r \sin \vartheta + n_{\vartheta \varphi} \cos \vartheta + p_{\varphi} r^2 \sin \vartheta = 0$
  - $\sum F_z = n_{\vartheta} r + n_{\varphi} r + p_z r^2$
- Gleichgewichtsbedingungen für rotationssymmetrische Schalen ( $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ ,  $n_{\varphi \vartheta} = 0$ )
  - $\sum F_{\vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} n_{\vartheta} r \sin \vartheta - n_{\varphi} r \cos \vartheta + p_{\vartheta} r^2 \sin \vartheta = 0$
  - $\sum F_{\varphi} = p_{\varphi} r^2 \sin \vartheta = 0 \Rightarrow p_{\varphi} = 0$
  - $\sum F_z = n_{\vartheta} r + n_{\varphi} r + p_z r^2 \Rightarrow n_{\varphi} = -n_{\vartheta} - p_z r$
- Einwirkungen
  - Eigengewicht:  $g_{\vartheta} = g \cdot \sin \vartheta$ ,  $g_z = g \cdot \cos \vartheta$
  - Schnee:  $\tilde{s} = s \cdot \cos \vartheta \rightarrow p_{\vartheta} = s \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta$ ,  $p_z = s \cdot \cos^2 \vartheta$
  - Wind:  $w = p_z = w_H = w_V$ ,  $p_{\vartheta} = 0$