

Die Formelsammlungen sind teilweise stark veraltet (Vorlesungsinhalte aus vergangenen Semestern, alte Normen...) und sollten lediglich als Hilfestellung zum Verfassen eigener Formelsammlungen dienen. Kontrolliert auf jeden Fall die Formeln, es haben sich auch Fehler eingeschlichen.

Flächentragwerke Formelsammlung

Jan Höffgen

18. Februar 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Scheiben	2
1.1 Rotationssymmetrische Scheiben	2
2 Platten	3
2.1 Platten-DGL	3
2.2 Belastungsumordnungsverfahren	5
2.3 Verfahren nach Pieper/Martens	5
3 Schalen	6

1 Scheiben

- Scheiben-DGL: $2 \cdot (1 + \nu) \cdot n_{xy,xy} = n_{x,yy} - \nu \cdot n_{y,yy} + n_{y,xx} - \nu \cdot n_{x,xx}$
- Airy'sche Spannungsfunktion F mit $\Delta\Delta F = F_{,xxxx} + 2 \cdot F_{,xxyy} + F_{,yyyy} = 0$
 - $n_x =: F_{,yy} \rightarrow \sigma_x = \frac{n_x}{d}$
 - $n_y =: F_{,xx} \rightarrow \sigma_y = \frac{n_y}{d}$
 - $n_{xy} =: -F_{,xy} - yf_x - xf_y \rightarrow \tau_{xy} = \frac{n_{xy}}{d}$
- Verschiebungen
 - $Ed \cdot u_x = \int_{(x)} F_{,yy} dx - \nu F_{,x} + f(y)$
 - $Ed \cdot u_y = \int_{(y)} F_{,xx} dy - \nu F_{,y} + f(x)$
- Dehnungen
 - $\varepsilon_x = u_{x,x} = \frac{1}{Ed} \cdot (F_{,yy} - \nu F_{,xx}) = \frac{1}{Ed} \cdot (n_x - \nu n_y)$
 - $\varepsilon_y = u_{y,y} = \frac{1}{Ed} \cdot (F_{,xx} - \nu F_{,yy}) = \frac{1}{Ed} \cdot (n_y - \nu n_x)$
 - $\gamma_{xy} = u_{x,y} + u_{y,x}$
- Transformation der Kräfte
 - $n_\xi = \frac{1}{2}(n_x + n_y) + \frac{1}{2}(n_x - n_y) \cos(2\alpha) + n_{xy} \sin(2\alpha)$
 - $n_\eta = \frac{1}{2}(n_x + n_y) - \frac{1}{2}(n_x - n_y) \cos(2\alpha) - n_{xy} \sin(2\alpha)$
 - $n_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(n_x - n_y) \sin(2\alpha) + I_{yz} \cos(2\alpha)$
 - Hauptnormalkräfte: Drehung um $\tilde{\alpha} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2 \cdot n_{xy}}{n_x - n_y}\right)$
- Randbedingungen
 - freier Rand: $n_x(a) = n_y(a) = 0$
 - gelagerter Rand: $u_x(a) = u_y(a) = 0$ mit $f(y) = f(x) = 0$
- Scheiben-DGL in PK mit $F \neq f(\varphi)$: $\Delta\Delta F = F_{,rrrr} + \frac{2}{r} F_{,rrr} - \frac{1}{r^2} F_{,rr} + \frac{1}{r^3} F_{,r} = 0$
- Allg. Lösung: $F = c_0 + c_1 \cdot \ln r + c_2 \cdot r^2 + c_3 \cdot r^2 \cdot \ln r$
 - $n_r = \frac{1}{r^2} F_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{r} F_{,r}$
 - $n_\varphi = F_{,rr}$
 - $n_{r\varphi} = -\left(\frac{1}{r} \cdot F_{,\varphi}\right)_{,r}$

1.1 Rotationssymmetrische Scheiben

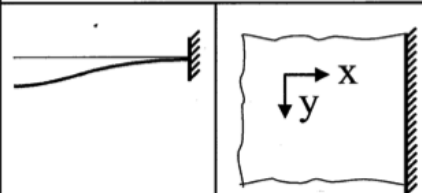
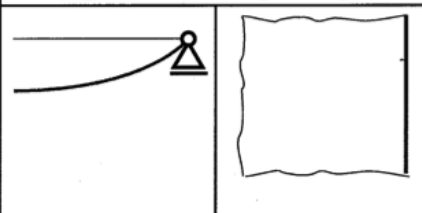
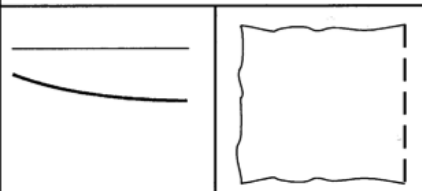
- Scheiben-DGL in PK: $\Delta\Delta F = F_{,rrrr} + \frac{2}{r} F_{,rrr} - \frac{1}{r^2} F_{,rr} + \frac{1}{r^3} F_{,r} = 0$
- Allg. Lösung: $F = c_0 + c_1 \cdot \ln r + c_2 \cdot r^2$
 - $n_r = \frac{1}{r} F_{,r} = c_1 \cdot \frac{1}{r^2} + 2c_2$
 - $n_\varphi = F_{,rr} = -c_1 \frac{1}{r^2} + 2c_2$
 - Bei Vollscheiben $c_1 = 0$, damit $n_r(0)$ und $n_\varphi(0) \neq \infty$
- Werkstoffgesetz
 - $\varepsilon_r = \frac{1}{Ed}(n_r - \nu n_\varphi) + \alpha_T \Delta T$
 - $\varepsilon_\varphi = \frac{1}{Ed}(n_\varphi - \nu n_r) + \alpha_T \Delta T$
- Verschiebungen
 - $u_r = \int \varepsilon_r dr = \frac{1}{Ed} \int (n_r - \nu n_\varphi) dr = r \varepsilon_\varphi$
 - $u_\varphi = 0$

2 Platten

2.1 Platten-DGL

- Plattentheorien
 - Reissner–Mindlin für $\frac{1}{5} \geq \frac{d}{l_x} \geq \frac{1}{10}$
 - * Schubsteif (Schubverzerrung, $\gamma_{xz}, \gamma_{yz} \neq 0$)
 - Kirchhoff für $\frac{1}{10} \geq \frac{d}{l_x} \geq \frac{1}{50}$
 - * Schubstarr (ohne Schubverzerrungen, $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$)
- Plattensteifigkeit $B = \frac{E \cdot d^3}{12(1-\nu^2)}$
- Allg. Platten DGL nach Kirchhoff: $w_{,xxxx} + 2 \cdot w_{,xxyy} + w_{,yyyy} = \frac{p}{B}$
 - Schnittgrößen (Bild S. 3.14)
 - * $m_x = -B(w_{,xx} + \nu w_{,yy})$ (Moment um y , bewirkt Spannungen in x -Richtung)
 - * $m_y = -B(w_{,yy} + \nu w_{,xx})$ (Moment um x , bewirkt Spannungen in y -Richtung)
 - * $m_{xy} = -B \cdot w_{,xy}(1 - \nu)$ ($= 0$ an Einspannungen, < 0 am freien Rand)
 - * $q_x = -B(w_{,xxx} + w_{,xyy})$ (Querkraft in z am Rand parallel zur y -Richtung)
 - * $q_y = -B(w_{,yyy} + w_{,xxy})$ (Querkraft in z am Rand parallel zur x -Richtung)
 - Ersatzquerkräfte
 - * $\bar{q}_x = q_x + m_{xy,y} = -B(w_{,xxx} + (2 - \nu) \cdot w_{,xxy})$
 - * $\bar{q}_y = q_y + m_{xy,x} = -B(w_{,yyy} + (2 - \nu) \cdot w_{,xxy})$
 - Spannungen
 - * $\sigma_x = \pm 6 \frac{m_x}{d^2}$
 - * $\sigma_y = \pm 6 \frac{m_y}{d^2}$
 - * $\tau_{xy} = \pm 6 \frac{m_{xy}}{d^2}$
 - * $\tau_{xz} = 1,5 \frac{q_x}{d}$
 - * $\tau_{yz} = 1,5 \frac{q_y}{d}$
 - Eckkräfte durch Drillmoment: $A = 2 \cdot m_{xy}$
- DGL der drillweichen Platte: $w_{,xxxx} + w_{,yyyy} = \frac{p}{B}$
 - $m_{xy} = 0$
- DGL für rotationssymmetrische Platten: $r^4 w_{,rrrr} + 2r^3 w_{,rrr} - r^2 w_{,rr} + r w_{,r} = \frac{p}{B} r^4$
 - Lösungsansatz: $w = w_H + w_P = c_0 + c_1 \ln r + c_2 r^2 + c_3 r^2 \ln r + w_P$
 - * $p = \text{const.} \rightarrow w_P = \frac{p \cdot r^4}{64B}$
 - * Ableitungen
 - $w_{H,r} = \frac{c_1}{r} + 2c_2 r + c_3(2r \ln r + r)$
 - $w_{H,rr} = -\frac{c_1}{r^2} + 2c_2 + c_3(3 + 2 \ln r)$
 - $w_{H,rrr} = 2\frac{c_1}{r^3} + c_3 \cdot \frac{2}{r}$
 - * Für rotationssymmetrische Kreisplatten unter Volllast gilt $c_1 = c_3 = 0$
 $\Rightarrow w_H(r) = c_0 + c_2 r^2$
 - * Lösungen für Kreisplatten unter Gleichlast, mittiger Einzellast und konst. Randmomenten im Skript S. 3.28 – 3.32
 - Schnittgrößen
 - * $m_r = -B(w_{,rr} + \nu \frac{w_{,r}}{r})$
 - * $m_\varphi = -B(\frac{1}{r} w_{,r} + \nu w_{,rr})$
 - * $q_r = -B(w_{,rrr} + \frac{1}{r} w_{,rr} - \frac{1}{r^2} w_{,r})$
- DGL für elastische Bettung: $\Delta \Delta w + \frac{c}{B} w = \frac{p}{B}$
- DGL für Temperaturbelastung: $\Delta \Delta w + (1 + \nu) \Delta \kappa^t = \frac{p}{B}$

• Randbedingungen

Art	RB	Folgerungen
<p>Einspannung</p> 	$w = 0$ $w_{,x} = 0$	$w_{,y} = 0$ $w_{,xy} = 0 \rightarrow m_{xy} = 0$ $\rightarrow \bar{q}_x = q_x$
<p>gelenkige Lagerung</p> 	$w = 0$ $m_x = 0$	$w_{,y} = 0 \quad w_{,x}(y) \neq 0$ $\rightarrow w_{,xy} \neq 0$ $\rightarrow m_{xy} \neq 0 \rightarrow \bar{q}_x = \dots$ $w_{,yy} = 0 \rightarrow w_{,xx} = 0$ $(m_x \stackrel{!}{=} 0) \rightarrow \Delta w = 0$
<p>freier Rand</p> 	$\bar{q}_x = 0$ $m_x = 0$	$q_x + m_{xy,y} = 0$

– Rotationssymmetrische Platte mit Radius a unter konstanter Volllast p : $q_r(a) = -\frac{p \cdot a}{2}$

– Rotationssymmetrische Platte: $w(r=0) = \text{„endlich“} \rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} w \neq \infty$

• Reihenlösungen (S. 3.33 ff)

– Beschreibung der Lastfunktion $\bar{p}(x)$ als Fourierreihe $p(x)$

$$* p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\frac{2k\pi}{L}x) + b_k \sin(\frac{2k\pi}{L}x))$$

$$\cdot a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L \bar{p}(x) dx$$

$$\cdot a_k = \frac{2}{L} \int_0^L \bar{p}(x) \cos(\frac{2k\pi}{L}x) dx$$

$$\cdot b_k = \frac{2}{L} \int_0^L \bar{p}(x) \sin(\frac{2k\pi}{L}x) dx$$

* f ungerade $\leftrightarrow a_k = 0$ für $k \geq 0$

* f gerade $\leftrightarrow b_k = 0$ für $k \geq 1$

– Lösungsansatz: $w = w_p + w_h$

$$* w_p = \sum_k w_n \sin(\frac{2k\pi}{L}x) \quad (w_n \text{ aus S. 3.40})$$

$$* w_h = \sum_k (d_{k1} \cosh(\frac{2k\pi}{L}x) + d_{k2} x \cosh(\frac{2k\pi}{L}x)) + \sum_k (d_{k3} \sinh(\frac{2k\pi}{L}x) + d_{k4} x \sinh(\frac{2k\pi}{L}x))$$

* Ableiten und in Ansatzfunktion für w einsetzen

· Partikulärlösung: Koeffizientenvergleich der Partikulärlösung mit Lastfunktion

· Homogene Lösung: Berücksichtigung der Randbedingungen

2.2 Belastungsumordnungsverfahren

- Voraussetzungen
 - $\frac{\min l_{x/y}}{\max l_{x/y}} \geq 0,75$
 - Gleichlast
 - Plattendicke konstant
 - $w \approx 0$ an den Rändern, drillsteife Plattenecken, Plattenfelder untereinander biegesteif
- Bestimmung der maximalen Feldmomente
 1. Berechnung der Feldmomente m_f^a für die realen Lagerungsbedingungen für die Belastung $p' = g_d + \frac{q_d}{2}$
 - (a) Bestimmung der Lagerungsbedingungen und Identifikation des Plattentyps
 - (b) Bestimmung des jeweiligen Stützweitenverhältnisses des Feldes $\left(\frac{l_y}{l_x} \geq 1\right)$
 - (c) $m_{f,ix/y} = p' \cdot \frac{l_{x/y}^2}{TW}$
 2. Berechnung der Feldmomente m_f^b für allseitig gelenkige Lagerung für $p'' = \pm \frac{q_d}{2}$
 - Für maximales Feldmoment Feld mit $+\frac{q_d}{2}$, für minimales Feldmoment Feld mit $-\frac{q_d}{2}$ belasten
 3. $m_{f,ges} = m_f^a + m_f^b$
- Bestimmung der Stützmomente
 1. Berechnung der Stützmomente $m_{s,ij}^a$ und $m_{s,ji}^a$ für die realen Lagerungsbedingungen für die Belastung $p' = g_d + \frac{q_d}{2}$
 2. Berechnung der Stützmomente $m_{s,ij}^b$ und $m_{s,ji}^b$ mit Einspannungsrandbedingung an der untersuchten Stützung für $p'' = \pm \frac{q_d}{2}$
 3. $m_{s,ij,ges} = m_{s,ij}^a + m_{s,ij}^b$
 4. $m_{s,ges} = \frac{1}{2} \cdot (m_{s,ij,ges} + m_{s,ji,ges})$
- Berücksichtigung der Querdehnung: $m_{f,x}(\nu \neq 0) = m_{f,x}(\nu = 0) + \nu \cdot m_{f,y}(\nu = 0)$

2.3 Verfahren nach Pieper/Martens

- Voraussetzungen
 - Verkehrslast $q_d \leq 2 \cdot g_d$
 - Gleichlast
 - Plattendicke konstant
 - $w \approx 0$ an den Rändern, Plattenfelder untereinander biegesteif
- Bestimmung der Feldmomente
 1. Bestimmung der Lagerungsbedingungen und Identifikation des Plattentyps
 2. Bestimmung des jeweiligen Stützweitenverhältnisses des Feldes $\left(\frac{l_y}{l_x} \geq 1\right)$
 3. Ablesen der Beiwerte f_x und f_y für drillsteife (oder f_x^0 und f_y^0 für drillweiche) Platten aus Tafeln
 4. Berechnung der Feldmomente $m_{f,ix/y} = p_d \cdot \frac{l_{x/y}^2}{f_{x/y}}$ mit $p_d = g_d + q_d$
- Bestimmung der Stützmomente
 1. Ablesen der Beiwerte s_x und s_y für beide Platten, die am Unterzug gelagert sind
 - Für Stützmoment an der langen Seite ($m_{y,erm}$) s_x ablesen
 2. Berechnung der Stützmomente

$$m_{s,ij} = m_{s,ji} = - \begin{cases} \max \left\{ \frac{1}{2} \cdot p_d \cdot l_{x/y} \cdot \left(\frac{1}{s_{x/y,ij}} + \frac{1}{s_{x/y,ji}} \right) \right. & \text{für } \frac{l_{xi}}{l_{xj}} < 5 \\ \left. 0,75 \cdot \max m_{s,ij} \right\} & \text{für } \frac{l_{xi}}{l_{xj}} > 5 \\ \max\{m_{si}, m_{sj}\} & \end{cases}$$

3 Schalen

- Koordinatenrichtungen
 - ϑ : Winkel zwischen Schalenoberseite und Schalenunterseite
 - φ : Winkel in Umfangsrichtung
- Gleichgewichtsbedingungen (Membrantheorie)
 - $\sum F_{\vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} n_{\vartheta} r \sin \vartheta - n_{\varphi} r \cos \vartheta + p_{\vartheta} r^2 \sin \vartheta = 0$
 - $\sum F_{\varphi} = \frac{\partial n_{\varphi}}{\partial \varphi} r + \frac{\partial}{\partial \vartheta} n_{\vartheta \varphi} r \sin \vartheta + n_{\vartheta \varphi} \cos \vartheta + p_{\varphi} r^2 \sin \vartheta = 0$
 - $\sum F_z = n_{\vartheta} r + n_{\varphi} r + p_z r^2$
- Gleichgewichtsbedingungen für rotationssymmetrische Schalen ($\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0, n_{\varphi \vartheta} = 0$)
 - $\sum F_{\vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} n_{\vartheta} r \sin \vartheta - n_{\varphi} r \cos \vartheta + p_{\vartheta} r^2 \sin \vartheta = 0$
 - $\sum F_{\varphi} = p_{\varphi} r^2 \sin \vartheta = 0 \Rightarrow p_{\varphi} = 0$
 - $\sum F_z = n_{\vartheta} r + n_{\varphi} r + p_z r^2 \Rightarrow n_{\varphi} = -n_{\vartheta} - p_z r$
- Einwirkungen
 - Eigengewicht: $g_{\vartheta} = g \cdot \sin \vartheta, g_z = g \cdot \cos \vartheta$
 - Schnee: $\tilde{s} = s \cdot \cos \vartheta \rightarrow p_{\vartheta} = s \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta, p_z = s \cdot \cos^2 \vartheta$
 - Wind: $w = p_z = w_H = w_V, p_{\vartheta} = 0$