Die Formelsammlungen sind teilweise stark veraltet (Vorlesungsinhalte aus vergangenen Semestern, alte Normen...) und sollten lediglich als Hilfestellung zum Verfassen eigener Formelsammlungen dienen. Kontrolliert auf jeden Fall die Formeln, es haben sich auch Fehler eingeschlichen.

Baudynamik

Jan Höffgen

18. Februar 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Koordinatensysteme

- karthesisch
  - $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$
  - $\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z$
  - $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$
- polar
  - $\vec{e}_r(\varphi) = \cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y,\ e_\varphi(\varphi) = -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y$
  - $\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = \vec{e}_\varphi$
  - $\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = \vec{e}_r$
  - $\dot{\vec{e}_r} = \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$
  - $\dot{\vec{e}_\varphi} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$
  - $\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r(\varphi(t))$
  - $\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$
  - $\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\varphi^2 + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi,$ mit $\dot{\varphi} = \omega$, Zylinderkoord. im 3D

2 Bewegungsgleichungen

2.1 Allgemeines

- Begriffe
  - $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$: Eigenkreisfrequenz
  - $\delta = \frac{d}{2m}$: Abklingkoeffizient
  - $\tau = \omega_0 \cdot t$: dimensionslose Eigenzeit
  - $D = \frac{d}{2\sqrt{km}}$: dimensionsloses Dämpungsmaß
    * $1 < D$: Kriechbewegung
    * $0 < D < 1$: gedämpfte Schwingung
    * $D = 0$: ungedämpfte Schwingung
    * $-1 < D < 0$: oszillatorische Anfachung
    * $D < -1$: nicht oszillatorische Anfachung
  - $\Omega = \frac{2\pi}{T_e}$: Erregerkreisfrequenz
  - $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$: Abstimmungsverhältnis
  - $\nu = \sqrt{1 - D^2}$
- Typen von Bewegungsgleichungen
  - Ungedämpfte freie Schwingung
    * DGL: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
    * Lsg: $x(t) = C\cos(\omega t - \alpha)$
  - Gedämpfte freie Schwingung
    * DGL: $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0$
    * Lsg (für $D \ll 1$): $x(t) = Ce^{-\delta t}\cos(\sqrt{1 - D^2}\omega t - \alpha) = Ce^{-\delta t}\cos(\nu\tau - \alpha)$
  - Ungedämpfte erzwungene Schwingung mit $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$
    * DGL: $\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 X_0 \cos(\Omega t)$
    * Lsg: $x_p(t) = X_0 V \cos(\Omega t)$
      · $V = \frac{1}{1-\eta^2}$ im Allgemeinen;
      muss bestimmt werden durch Ableiten von x_p und Koeffizientenvergleich

- Gedämpfte erzwungene Schwingung
  - DGL: $\ddot{x} + 2D\omega\dot{x} + \omega^2 x = X_0 E \omega^2 \cos(\Omega t)$
  - Lsg: $x_p(t) = X_0 V \cos(\Omega t - \varphi)$
    - $E = 1$ bei Erregung durch Feder
    - $E = 2D\eta$ bei Erregung über Dämpfer
    - $E = \eta^2$ bei Erregung durch rot. Unwucht
    - $E = \sqrt{1 + (2D\eta)^2}$ bei Fundamenterregung

- Federsteifigkeiten
  - Federn in Reihe: $\frac{1}{k_{ges}} = \sum_i \frac{1}{k_i}$
  - Federn parallel: $k_{ges} = \sum_i k_i$

- Ersatzfedersteifigkeiten: $k = \frac{F}{w_{max}}$
  - Dehnstab: $k = \frac{EA}{l}$
  - Eingespannter Balken, F am Balkenende: $k = 3\frac{EI}{l^3}$
  - Balken auf zwei Stützen, F in Balkenmitte: $k = 48\frac{EI}{l^3}$
  - Unten eingespannter, oben versch. eingespannter Balken: $k = 12\frac{EI}{l^3}$
  - Beidseitig eingespannter Balken, F in Feldmitte: $k = 192\frac{EI}{l^3}$

- Erregung
  - Erregung über mit Ω rotierende Unwucht der Masse m_u
    - Zentrifugalkraft $F = m_u \cdot \Omega^2 \cdot r$
      - Vertikal wirkender Kraftanteil $S_v = m_u \cdot \Omega^2 \cdot r \cdot \cos(\Omega t)$
    - Nennfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m+m_u}}$
    - Vergrößerungsfunktion $V_1 = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2D\eta)^2}}$
      - Maximale Vergrößerung bei $\eta_{krit}^2 = \frac{1}{1-2D^2}$
      - $V_1(\eta_{krit}) \approx \frac{1}{2D}$
    - Phasenverschiebungswinkel $\tan\gamma = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}$
  - Fundamenterregung
    - Vergrößerungsfunktion $V_2 = \frac{\sqrt{1+(2D\eta)^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2D\eta)^2}}$
      - $a_{Schwinger} = V_2 \cdot a_{Err}$
  - Harmonische Erregung
    - $V_3 = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2D\eta)^2}}$

- Abstimmung
  - Überkritisch/tief: Beim An- und Abschalten wird die Resonanzfrequenz durchfahren ($\Omega > \omega_0$)
    - Nur hier Abschirmung für $\eta > \sqrt{2}$ möglich
  - Unterkritisch/hoch: Resonanzstelle wird nicht durchfahren ($\Omega < \omega_0$)

- Filterwirkung
  - Übertragungsfunktion vergrößert die Schwingungen im Resonanzbereich und unterdrückt sie im restlichen Bereich

- Scheinresonanz
  - Amplituden bleiben rechnerisch endlich, obwohl $\Omega = \omega_0$, da Polynome mit gleichen Nullstellen

- Dirac'sche Deltafunktion: $\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0 \end{cases}$
  - Idealer Einheitsstoß mit der Intensität $\lim_{l \to 0} \int_0^l \delta(t)dt = 1$

- Isolierung
  - Aktiv: Abschirmung von Maschinen vom Restbauteil ($k \ll \frac{m\Omega^2}{2}$)
  - Passiv: Abschirmung des Bauteils vom bewegten Boden
  - Übetragungsfunktion $V_2 \equiv$ Vergrößerungsfunktion für Fundamenterregung

2.2 Synthetische Methode nach d'Alembert

1. Definition der Bewegung jedes einzelnen Körpers (Rot., Trans., Rot.+Trans.)
2. Koordinaten einführen
3. Anzahl Freiheitsgrade
4. Freischnitt aller Teilkörper in allgemeiner Lage
5. GGW an jedem Körper
   - Schwerpunktssatz: $\sum F_x = m \cdot \ddot{x}$
   - Drallsatz um Schwerpunkt: $\sum M^S = J^S \cdot \ddot{\varphi}$
   - Drallsatz um Drehpunkt: $\sum M^A = J^A \cdot \ddot{\varphi}$
     - $J^A = J^S + m \cdot z_s$
     - Prismen: $J^S = I_P \gamma t = I_P \frac{m}{A}$
     - Quarder: $J^S = \frac{m}{12}(b^2 + l^2)$
     - Kreiszylinder: $J^S = \frac{m}{2} r^2$
     - Stab: $J^S = \frac{1}{12} m l^2$
6. Bindungsgleichungen
7. Linearisieren
8. Bewegungsgleichungen

2.3 Analytische Methode mit den Lagrange'schen Gleichungen 2. Art

1. Anzahl FHGe (f)
2. generalisierte Koordinatenn $q_k, \; k = 1, ..., f$
3. Ortsvektoren zu einzelnen (n) Schwerpunkten in allgemeiner Lage $\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, ..., q_k), \; i = 1, ..., n$
4. NN definieren
5. Berechnung der Quadrate der Geschwindigkeiten $|\dot{\underline{r}}_i|$
6. Energieausdrücke
   - $T = T_{trans} + T_{rot} = \frac{1}{2} m |\dot{\underline{r}}_i|^2 + \frac{1}{2} J^{(S/A)} \dot{\varphi}^2$
   - $V = V_{Lage} + V_{Feder} = mgh + \frac{1}{2} k u^2 + \frac{1}{2} c \varphi^2$
7. Generalisierte Kräfte $Q_k^* = \sum_j \underline{F}_j^* \circ \frac{\partial \underline{r}_j}{\partial q_k}$
   - Bei Momenten: $Q_k = M$
8. f Lagrange'sche Gleichungen: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k^*$

2.4 Systeme mit zwei Freiheitsgraden

- Allgemeine Form der ungedämpften Schwingung: $\underline{M}\ddot{\underline{q}} + \underline{K}\underline{q} = \underline{0}$
  - Massenmatrix $\underline{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix}$
  - Steifigkeitsmatrix $\underline{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}$
  - Allgemeine Lösung: $q = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \cdot \cos(\omega t + \alpha)$
- Bestimmung der Eigenvektoren über charakteristische Gleichung: $\det(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) = 0$
  - $\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2a}(b \mp \sqrt{b^2 - 4ac})$
    * $a = m_{11}m_{22} - m_{12}^2$
    * $b = k_{11}m_{22} + k_{22}m_{11} - 2k_{12}m_{12}$
    * $c = k_{11}k_{22} - k_{12}^2$
- Amplitudenverhältnis $\kappa_i = \frac{m_{11}\omega_i^2 - k_{11}}{k_{12} - m_{12}\omega_i^2}$
  - Wenn $\kappa_1 = 1$ Starrkörperbewegung in einem mehr-FHG-System
- Eigenvektoren
  - Grundschwingung: $\phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa_1 \end{bmatrix}$
  - 1. Oberschwingung: $\phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix}$
- Eigenformen: 1. FHG um 1 auslenken, 2. FHG um κ_i auslenken
- Abschätzen der kleinsten Eigenfrequent über den Rayleigh-Koeffizienten: $w_1^2 \leq R = \frac{\underline{\varphi^T} \cdot \underline{K} \cdot \underline{\varphi}}{\underline{\varphi^T} \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}}$
  - Raten von φ, z. B. $\varphi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ oder $\varphi = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
- Homogene Lösung der Bewegungsgleichung: $\underline{q}_H = \underline{q}_1 + \underline{q}_2$
  - $\underline{q}_1 = C_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa_1 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t + \alpha_1)$
  - $\underline{q}_2 = C_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$

  $\equiv$ $q_1(t) = C_{11}\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_{12}\cos(\omega_1 t + \alpha_2)$

  $\equiv$ $q_2(t) = C_{11}\kappa_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_{12}\kappa_2\cos(\omega_1 t + \alpha_2)$
- Partikulärlösung bei harmonischer Erregung: $\underline{q}_P = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \cos(\Omega t) \left(+ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \sin(\Omega t) \right)$
  - Getrennt nach Sinus und Kosinus ableiten, einsetzen und LGS über Determinanten lösen
  - Schwingungstilgung: $a_1 \overset{!}{=} 0$

3 Fourierentwicklung

- Für T-periodische Funktion f und Intervall I der Länge T gilt:
  $F(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(\frac{2k\pi}{T}x) + b_k \sin(\frac{2k\pi}{T}x))$
  - $a_0 = \frac{1}{T}\int_I f(x)dx$
  - $a_k = \frac{2}{T}\int_I f(x)\cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx$
  - $b_k = \frac{2}{T}\int_I f(x)\sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx$
- f ungerade $\leftrightarrow$ $a_k = 0$ für $k \geq 0$
- f gerade $\leftrightarrow$ $b_k = 0$ für $k \geq 1$